

# ОМАРОВ МАДИ ТУЛЕГЕНОВИЧ

## ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

### АННОТАЦИЯ

Диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) по образовательной программе 8D05401-Математика

**Актуальность темы.** Классический фундамент исследования образуют труды по параболическим уравнениям и задачам с изменяющейся геометрией области. Уже работа М. Жевре заложила основу аналитического исследования уравнений параболического типа; затем общая теория была систематизирована А. Фридманом, задачи со свободной и движущейся границей подробно исследованы Дж. Крэнком, а одномерная теория теплопроводности и краевых задач — Дж. Р. Кэнноном. Вместе с тем переход к областям переменной геометрии, естественно, усиливает роль интегрально-операторных методов. В этом отношении принципиальное значение имеют статья Г. Х. Харди и Э. К. Титчмарша «An integral equation», монография Ф. Г. Трикоми, фундаментальный труд Грипенберга, Лондена и Стаффанса, монография Т. А. Бёртона, а также исследования слабосингулярных интегрально-алгебраических и интегро-дифференциальных уравнений.

При исследовании краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка существенную роль играют работы А. Н. Герасимова и М. Капуто, а также исследования М. М. Джрбашяна. Систематическое изложение теории дробных интегралов и производных, а затем и дробных дифференциальных уравнений дано в монографиях С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, И. Подлубного, Х. М. Сриваставы и Х. Х. Трухильо, К. Дитхельма, а также в коллективной книге под редакцией Р. Хильфера. Физико-математическая мотивация этих исследований связана с моделированием процессов с памятью, наследственностью и аномальным переносом; в этом направлении нужно отметить работы Р. Р. Нигматуллина, Р. Метцлера и Дж. Клафтера. Эти работы содействовали тому, что дробные уравнения явились естественным средством описания медленных диффузионных и релаксационных процессов.

Для аналитического исследования дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений решающую роль играет аппарат специальных функций, прежде всего функций Райта и Миттаг–Леффлера. Его истоки восходят к работам Э. М. Райта. Позднее свойства функции Райта, её связь с фундаментальными решениями уравнений дробного порядка и её

масштабная инвариантность были подробно исследованы Р. Горенфло, Ю. Лучко и Ф. Майнарди. Важное значение имеют также результаты Ф. Майнарди о фундаментальных решениях дробного диффузионно-волнового уравнения и его монографическое изложение теории волн и релаксации в средах с памятью.

Собственно теория дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений развивалась от первых моделей дробной диффузии и соответствующих фундаментальных решений к краевым задачам в ограниченных областях, принципам максимума и начально-краевым постановкам. Работы В. Р. Шнайдера и В. Вайсса, А. Н. Кочубея, С. Д. Эйдельмана и показали, что дробный порядок по времени не является лишь формальной модификацией классического уравнения теплопроводности, а приводит к иной структуре фундаментального решения и к новым вопросам существования. Далее О. П. Агравал, Ю. Лучко, К. Сакамото и М. Ямамото исследовали краевые и начально-краевые задачи, установили результаты о существовании, единственности и свойствах решений. Однако именно для неканонических и нецилиндрических областей эта теория разработана значительно меньше.

Отметим также работы А. В. Псху, в которых получены: решение краевой задачи для дробного уравнения, построение решений методом функции Грина, монография по уравнениям в частных производных дробного порядка, фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка, а также первая краевая задача в нецилиндрической области. Особое место занимает работа о функциях Грина для многомерных областей, поскольку она напрямую соотносится с тематикой диссертации, где центральными объектами являются именно функции Грина и интегральные представления в областях сложной геометрии.

Также отметим работы А. Кубицы, П. Рыбки и К. Рышевской о слабых решениях в нецилиндрических областях, А. В. Псху, М. И. Рамазанова, Н. К. Гульманова и С. А. Искакова, посвященные краевым задачам в неканонических областях.

Актуальность диссертационного исследования определяется необходимостью дальнейшего развития теории краевых задач для дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях. Наиболее существенными здесь являются три взаимосвязанных обстоятельства: нелокальный по времени характер дробных операторов, сложная геометрия области решения и возникающая при этом необходимость в построении новых функций Грина, дробно-диффузионных потенциалов и исследовании сингулярных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Именно эта совокупность вопросов и составляет основное содержание диссертационной работы.

### **Цель работы.**

Целью диссертационной работы является развитие аналитических методов исследования дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях на основе построения фундаментальных решений и функций Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто, получения явных интегральных представлений решений, сведения начально-краевых задач к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода, а также установления условий существования и единственности регулярных, классических и обобщённых решений в вырождающихся областях с подвижными, сужающимися, расширяющимися границами.

### **Задачи исследования:**

1. Систематизировать и уточнить вспомогательный аппарат, необходимый для исследования рассматриваемых задач, включая свойства обобщённых функций, функций Миттаг–Леффлера и Райта, а также дробных операторов Римана–Лиувилля и Герасимова–Капуто.

2. Получить интегральное представление решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля и исследовать вопросы существования и единственности регулярного решения.

3. Построить фундаментальные решения и функции Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях, в частности на полуоси, в полуплоскости и в областях, допускающих приведение к каноническому виду заменой переменных.

4. Исследовать краевую задачу для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области, получить явную интегральную формулу регулярного решения и свести задачу к интегральному уравнению Вольтерра второго рода для неизвестной граничной плотности.

5. Исследовать задачу Дирихле для дробного диффузионного уравнения с правосторонней производной Лиувилля в угловой области, установить формулы скачка соответствующего потенциала и доказать однозначную разрешимость возникающего интегрального уравнения Вольтерра.

6. Разработать весовую функциональную схему исследования диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей, установить условия на параметры весов, доказать теоремы единственности и существования классических и обобщённых решений и построить функцию Грина исследуемой задачи.

7. Исследовать интегральные преобразования с ядром Райта, получить коммутационные формулы для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также установить критерий существования экспоненциальных решений соответствующего дробного уравнения.

#### **Общие методы исследования.**

В диссертационной работе использованы методы дробного исчисления, теория обобщённых функций, методы теории уравнений в частных производных и интегральных уравнений. При построении решений применяются функции Грина, фундаментальные решения, дробно-диффузионные потенциалы, метод отражений, замены переменных, приводящие область к более удобному виду, а также методы интегральных преобразований, включая преобразования Лапласа, синус-преобразование и преобразование Станковича. Существенную роль играют специальные функции, прежде всего функции Миттаг–Леффлера и Райта, а также ядра типа Шилова–Гельфанда. Для исследования разрешимости краевых задач используются методы сведения к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода со слабой или сингулярной особенностью, метод последовательных приближений, оценки интегральных операторов, а также методы функционального анализа, включая работу во взвешенных пространствах, доказательство компактности вложений и энергетические тождества. Доказательство существования построенных решений основано на прямой подстановке в исходные уравнения и граничные условия, а также на предельных переходах, обоснованных условиями сходимости соответствующих интегралов.

#### **Научная новизна.**

В диссертационной работе новые результаты по теории дробно-диффузионных и диффузионно-волновых уравнений в неканонических областях.

1. Найдено решение дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля, построенное методом функции Грина; установлены условия существования и единственности регулярного решения.

2. Построены фундаментальные решения и функции Грина для ряда дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях; найдены решения соответствующих краевых задач.

3. Для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области получена явная формула регулярного решения и доказано, что задача сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестной граничной плотности.

4. Для задачи Дирихле в вырожденной угловой области получено представление решения через дробные потенциалы, выведена формула скачка дробного потенциала двойного слоя и доказана однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения Вольтерра.

5. Для диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей разработан весовой подход, позволяющий установить условия на параметры весов, доказать компактность соответствующего вложения, построена функция Грина и доказаны теоремы единственности и существования классических и обобщённых решений.

6. Исследованы интегральные преобразования с ядром Райта; установлены коммутационные соотношения для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также получен секторный критерий существования и структура экспоненциальных решений соответствующего дробного уравнения.

#### **Теоретическая и практическая значимость исследования.**

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в дальнейшем развитии теории дробных дифференциальных уравнений и краевых задач для уравнений математической физики в неканонических областях. Полученные результаты расширяют метод функций Грина для уравнений с дробными производными по времени, уточняют связь между краевыми задачами и интегральными уравнениями Вольтерра второго рода, а также развивают аналитический аппарат исследования задач в вырождающихся областях с подвижными границами. Существенное теоретическое значение имеет разработка весового подхода к диффузионно-волновым задачам в областях с диагональной подвижной границей, а также исследование интегральных преобразований с ядром Райта для правосторонних дробных операторов.

Практическая значимость работы заключается в том, что построенные функции Грина, явные интегральные формулы решений, полученные оценки и критерии разрешимости могут быть использованы при исследовании прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, при разработке вычислительных методов для задач с памятью и подвижными границами, а также при математическом моделировании процессов аномальной диффузии, релаксации и переноса в средах со сложной геометрией. Результаты диссертации могут быть использованы в научно-исследовательской работе, а также при подготовке специальных курсов по дробному исчислению, уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.

#### **Основные положения, выносимые на защиту.**

1. Решение линейного дифференциального уравнения с правосторонней дробной производной Лиувилля и теоремы существования и единственности регулярного решения.

2. Построение фундаментальных решений и функций Грина для дробных операторов Римана–Лиувилля в модельных областях, а также соответствующие интегральные представления решений краевых задач.

3. Существование регулярного решения краевой задачи для уравнения дробной диффузии с бесконечной памятью в сужающейся нецилиндрической области и сведение задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

4. Существование и единственность решения задачи Дирихле для дробного диффузионного уравнения в вырожденной угловой области, формула скачка дробного потенциала двойного слоя, однозначная разрешимость соответствующего интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

5. Весовая функциональная постановка диффузионно-волновой краевой задачи в области с подвижной диагональной границей, функция Грина задачи, теоремы существования и единственности классических и обобщённых решений.

6. Коммутационные формулы для преобразования Станковича и правостороннего оператора Римана–Лиувилля, а также секторный критерий существования экспоненциальных решений дробного уравнения с правосторонней производной.

#### **Достоверность и обоснованность проведённых исследований.**

Достоверность и обоснованность полученных в диссертации результатов обеспечиваются строгой математической постановкой рассматриваемых задач, использованием апробированных методов дробного исчисления, теории специальных функций, теории интегральных преобразований и интегральных уравнений, а также полнотой и логической завершённостью доказательств. Все основные результаты получены аналитически и сопровождаются последовательным обоснованием допустимости используемых преобразований, включая перестановку интегрирования и дифференцирования, предельные переходы и исследование сходимости интегралов. Построенные функции Грина и интегральные представления решений проверяются непосредственной подстановкой в исходные уравнения с учетом граничных условий. Теоремы единственности опираются на энергетические тождества, свойства соответствующих функциональных классов и однозначную разрешимость интегральных уравнений Вольтерра. Теоремы существования имеют конструктивный характер и основаны на явных формулах, потенциалах и последовательных приближениях. Дополнительным подтверждением достоверности служит

согласованность полученных результатов с известными положениями общей теории дробных уравнений и их естественными предельными случаями.

### **Публикации.**

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [49-53], входящих в базы данных Web of Science Core Collection и Scopus.

1. Omarov M.T., A.V. Pskhu, Ramazanov M.I. The first boundary value problem for the fractional diffusion equation in a degenerate angular domain. Вестник Карагандинского университета. – Серия «Математика». – 2024. – № 1(113). – С. 162-173. <https://doi.org/10.31489/2024M1/162-173>, (Q2)

2. Ramazanov, M.I., Gulmanov, N.K., Kopbalina, S.S., Omarov M.T. Solution of a Singular Integral Equation of Volterra Type of the Second Kind. Lobachevskii J Math 45, 5898–5906 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1995080224606830>. (Q2)

3. Ramazanov M.I., Gulmanov N.K., Omarov M.T. On Solving a Singular Volterra Integral Equation. Filomat 39:11 (2025), 3647–3656. <https://doi.org/10.2298/FIL2511647R> (Q2)

4. A.D. Akhmetshin, M.T. Omarov, R.Z. Toleukhanova. A Boundary Value Problem for a Time-Fractional Diffusion Equation in a Non-Cylindrical Shrinking Domain. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, No. 1(121), 2026, pp. 37–54. <https://doi.org/10.31489/2026M1/37-54>.

5. M. T. Omarov, M. I. Ramazanov. Boundary Value Problem for the Fractional Diffusion Equation with the Right-Sided Liouville Operator in a Triangular Domain. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2026, Vol. 47, No. 2, pp. 625–635

### **Тезисы:**

1. Omarov M.T., A.V. Pskhu, Ramazanov M.I. Начальная граничная задача для уравнения дробной диффузии в вырождающейся угловой области. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов. Алматы: Институт математики и математического моделирования. – 2024. – С. 177;

2. Омаров М.Т., Псху А.В. Рамазанов М.И. The initial boundary value problem for fractional diffusion equations within a degenerate angular domain. Международная Научная Конференция «Математика В Созвездии Наук», посвященная 85-летию со дня рождения академика РАН Виктора Антоновича Садовниченко;

3. Гульманов Н.К., Омаров М.Т., Танин А.О. Решение Сингулярного Интегрального Уравнения Типа Вольтерры Задач Теплопроводности. International Scientific Conference Actual Problems Of Applied Mathematics And Information Technologies - Al-Khwarizmi 2024;

4. Рамазанов М.И., Гульманов Н. К., Омаров М. Т. О параболических задачах в вырождающихся областях. Международной научной конференции «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы современного анализа» 11–14 марта 2025 года, Нальчик, Кабардино-Балкарская Республика, Россия;

5. Омаров М.Т., Рамазанов М. И., Танин А. О., Шаяхметова Б. К. - Применение Нейронных Сетей Для Решения Обратных Задач, Связанных С Дробными Дифференциальными Уравнениями. Сборник Докладов Евразийской Международной Научной Конференций «Искусственный Интеллект И Обратные Задачи В Науке, Технике И Индустрии» 14–16 апрель 2025 год;

6. М.Т. Омаров, А.В. Псху, М.И. Рамазанов. Решение краевой задачи для уравнения дробной диффузии с правосторонним оператором Лиувилля в треугольной области. Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Сборник тезисов .- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2025. - 301 с;

7. Гульманов Н.К., Омаров М.Т., Танин А.О. Решение Сингулярного Интегрального Уравнения Типа Вольтерры Задач Теплопроводности. Фундаментальная наука и приоритеты XXI века: материалы международной научно-практической конференции (29 ноября 2024 г.) – Астана: Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, 2025. – 747 с;

8. M.T. Omarov, A.V. Pskhu, M.I. Ramazanov. On A Linear Differential Equation With A Right-Sided Liouville-Weyl Fractional Derivative. Международная Конференция «Актуальные Проблемы Анализа, Дифференциальных Уравнений И Алгебры» (EMJ-2025);

9. Омаров М.Т., Псху А.В., Рамазанов М.И. Дробная диффузия с правосторонней производной Лиувилля: краевая задача в треугольной области. International Conference on Mathematics, Mechanics, Information Technologies, and Artificial Intelligence (ICMM&IT 2025). September 24-26, 2025. Almaty, Kazakhstan;

10. Omarov M.T. Boundary value problem for the fractional diffusion equation with a right-sided Liouville operator in a triangular domain. 15th ISAAC Congress July 21 – July 25, 2025. Venue: Nazarbayev University, Astana, Kazakhstan;

11. М.И. Рамазанов, М.Т. Омаров. Краевые задачи для уравнения теплопроводности в вырождающихся областях и уравнения Вольтерра. XVII Международная Казанская школа-конференция” Теория функций, ее приложения и смежные вопросы”. (Казань, 23 – 28 августа 2025 г.);

12. Omarov M.T, Ramazanov M. A boundary value problem for a time-fractional diffusion equation in a non-cylindrical shrinking domain. International Scientific Conference “Trends in Analysis and Differential Equations”. Dedicated to the 65th Anniversary of Professor Batirkhan Turmetov. Turkistan.

**Апробация полученных результатов.**

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на вышеуказанных конференциях и семинарах.

**Вклад докторанта в подготовку каждой публикации.**

В основных 5-и работах, написанных в соавторстве с научными консультантами и соавторами, научные консультанты сформулировали постановку задачи и определили методологию исследования, а докторант самостоятельно сформулировал основные и вспомогательные результаты и доказал их.

**Структура и объем диссертации.**

Диссертационная работа объемом 144 страницы состоит из: введения, четырех разделов, заключения и списка использованной литературы. Нумерация математических утверждений (теорем, лемм, замечаний) и формул является трехзначной: первая цифра обозначает номер главы, вторая — номер раздела, третья — порядковый номер самого математического утверждения или формулы.

**Количество использованных источников: 73.**

**Ключевые слова.** Диффузия, дифференциальные уравнения дробного порядка, волновые уравнения, функция Грина, вырожденная угловая область.